Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette.

Von

Otto Schmidt in Moskau.

---

1. Die Theorie der endlichen Gruppen ist bis in weitgehende Einzelheiten ausgebaut. Gerade diese Einzelheiten, das verschiedenartige individuelle Verhalten der einzelnen Gruppentypen, bei gleichzeitiger Herrschaft sehr allgemeiner Gesetze, geben der Theorie ihren besonderen Reiz. In den weitverzweigten Anwendungen des Gruppenbegriffs begegnet man aber nicht weniger oft *unendlichen* Gruppen, und daher entsteht die Frage, in welchem Maße die für endliche Gruppen gewonnenen Gesetze sich auf diese oder jene unendliche übertragen lassen. Auf Übertragung der Einzelheiten wird man ja verzichten müssen, es wird sich hauptsächlich um die allgemeinsten Fundamentalsätze handeln. Die Aufgabe wird nun darin bestehen, aus den unendlichen Gruppen durch entsprechende Definition solche Klassen herauszugreifen, die einerseits die Fundamentalsätze der endlichen Gruppentheorie noch beibehalten, andererseits aber auch ein genügend großes Anwendungsgebiet erhalten können.

Einen glücklichen Schritt in dieser Richtung hat Herr W. Krull getan, allerdings in Beschränkung auf kommutative (Abelsche) Gruppen. W. Krull[1]) definiert „verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen" und beweist, daß für diese (im allgemeinen unendlichen) Gruppen der Hauptsatz der Theorie endlicher Abelscher Gruppen erhalten bleibt: die im wesentlichen eindeutige Zerlegung in direkte unzerlegbare Faktoren.

Während aber unter den endlichen Abelschen Gruppen nur die zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung unzerlegbar sind, können wir hier, bei den verallgemeinerten, nichts Bestimmtes über die unzerlegbaren Gruppen aussagen. Zum Beweise mußte darum zu den allgemeineren

---

[1]) W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, Math. Zeitschrift **23** (1925).

Sätzen von R. Remak[2]) über die Zerlegung endlicher, aber nicht notwendig kommutativer Gruppen zurückgekehrt werden. Aber auch die Übertragung des Remakschen Beweises erwies sich als unmöglich, so daß W. Krull zum Beweise seines „Fundamentalsatzes“ einen weitläufigen Apparat von Zwischensätzen unter neuen Definitionen (Zurückleitungsgruppe) mobilisierte.

Ich habe für die Sätze von Remak seinerzeit einfache Beweise und Verschärfungen gegeben[3]). Diese Beweise lassen sich allerdings auf die verallgemeinerten Gruppen von Krull auch nicht direkt übertragen, doch gelingt es auch in diesem Fall ähnliche Schlußweisen anzuwenden, die einen sehr einfachen Beweis des „Fundamentalsatzes“ von W. Krull ergeben.

Dieser Beweis ist aber *nicht* auf Abelsche Gruppen beschränkt, sondern bleibt auch für *nicht-kommutative Gruppen* desselben Typus („verallgemeinerte endliche“) richtig. Der Beweis besteht in einem Induktionsverfahren, das sich auf die Übertragung des Jordanschen Satzes über Kompositionsreihen auf unsere verallgemeinerte Gruppen stützt. Diese Übertragung ist von W. Krull in einer zweiten Arbeit[4]) gegeben (auch nur für Abelsche Gruppen) und von E. Noether[5]) in allgemeiner Form. — Der Vollständigkeit wegen beweise ich den für den Hauptsatz nötigen Teil des Jordanschen Satzes noch einmal, ohne damit etwas Neues zu sagen.

2. Definition. *Gruppen mit endlicher Kette oder verallgemeinerte endliche Gruppen* (abgekürzt: v. e. G.) *sind diejenigen Gruppen, bei denen von keiner invarianten Untergruppe ausgehend eine unendliche Kette von invarianten Untergruppen (oder Obergruppen) entstehen kann*[6]).

Unter einer Kette von Untergruppen wird eine Reihe $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots$ verstanden, in der jedes $\mathfrak{G}_i$ eine echte invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_{i-1}$ ist. Für Obergruppen gilt das gleiche, nur ist $\mathfrak{G}_i$ echte invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_{i+1}$.

---

[2]) R. Remak, Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Journal für r. u. a. Mathematik **139**.

[3]) O. Schmidt, Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Universitetskije Izvestija (Kiew), 1912. — O. Schmidt, Sur les produits directs, Bulletin de la Société Math. de France, t. XLI (1913). — Der zweite dieser Beweise ist in A. Speisers Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1923, wiedergegeben, der erste in meinem Buche „Abstrakte Gruppentheorie“, Kiew 1916 (russ.).

[4]) W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsber. der Heidelberger Akademie 1926.

[5]) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1926).

[6]) Die Krullsche Bezeichnung „verallgemeinerte endliche Gruppen“ scheint mir etwas unbestimmt. Das Wesentliche *dieser* Verallgemeinerung liegt in dem Begriffe der endlichen Kette, der zum Ideenkreise der Arbeiten von E. Noether gehört.

Diese Definition trifft das Wesentliche der Sache. W. Krull (der sich, wie gesagt, auf kommutative Gruppen beschränkte), fügt im Interesse der Anwendungen noch eine zweite Bedingung hinzu, die wir auch aufnehmen wollen:

Es sei ein gewisses System von *Operatoren* Θ gegeben, die, auf die Gruppenelemente angewandt, wieder Gruppenelemente ergeben und dabei *distributiv* sind, d. h.

$$\Theta(AB) = \Theta(A)\Theta(B).$$

Wir wollen im weiteren *nur* solche Gruppen (und solche Untergruppen) zulassen, die neben jedem Elemente A auch alle $\Theta(A)$ enthalten. Da im Spezialfall das Operatorensystem auch verschwinden (sich auf die Identität reduzieren) kann, so werden unsere Betrachtungen auch für die Gruppen *ohne die letztere Einschränkung* gültig bleiben. Andererseits kann sehr wohl der Fall eintreten, daß eine Gruppe erst unter der Einschränkung eines solchen Operatorensystems „verallgemeinert endlich“ wird, da ein Teil der Untergruppen dann als unzulässig ausscheidet.

Es ist aus der Definition des Operatorensystems leicht zu folgern, daß der *Durchschnitt*, die *Zusammenfassung* und das *direkte Produkt* zweier zulässiger Gruppen wieder zulässige Gruppen sind. Ebenso ist auch die Faktorengruppe $\mathfrak{G}|\mathfrak{H}$ bei zulässigen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ eine zulässige Gruppe.

Endlich ist noch der Begriff des Isomorphismus — nach Krull — dahin zu verschärfen, daß bei einander entsprechenden $A, A', A'' \ldots$ und $B, B', B'' \ldots$ nicht nur jedem AA' das BB' entspricht, sondern auch $\Theta(A)$ und $\Theta(B)$ einander entsprechen.

Da wir für das Folgende keine andere Konstruktion als die soeben angegebenen brauchen, so werden wir die „Zulässigkeit“ der Gruppen und Untergruppen, von denen die Rede sein wird, im weiteren stillschweigend voraussetzen, ebenso wie das Erfülltsein der „Definition“ der v. e. G., die wir einfach „Gruppen“ nennen werden. Also wird ein Gebilde nur dann Untergruppe genannt werden, wenn es eine „zulässige“ Untergruppe ist. Eine „Kompositionsreihe“ $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ wird also aus Gruppen bestehen, von denen jede eine „zulässige“ invariante echte Untergruppe der vorhergehenden ist, während keine „zulässige“ invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}_i$ existiert, die $\mathfrak{G}_{i+1}$ als echten Teiler enthält.

Wir wollen — nach Frobenius — Gruppen mit großen deutschen, Elemente mit den zugehörigen großen lateinischen Buchstaben bezeichnen.

3. Aus der Definition der v. e. G. folgt, daß jede Kompositionsreihe der Gruppe $\mathfrak{G}$ nur eine endliche Anzahl von Gliedern enthält. Damit ist nun zunächst noch nicht gesagt, daß bei den verschiedenen Kompositionsreihen einer Gruppe diese Anzahl unterhalb einer festen Grenze bleibt.

Wohl muß aber unter diesen Anzahlen für jede Gruppe eine *Minimalanzahl* existieren. Wir können alle Gruppen in Klassen nach diesen — ansteigenden — Minimalanzahlen einteilen.

Satz I. (Der Jordansche Satz.) *Alle Kompositionsreihen einer und derselben v. e. G. enthalten die gleiche Anzahl von Gliedern.*

Sei

$$\mathfrak{G},\ \mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{H}_2, \ldots,\ \mathfrak{H}_l = 1$$

eine beliebige Kompositionsreihe der Gruppe $\mathfrak{G}$ und

$$\mathfrak{G},\ \mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2, \ldots,\ \mathfrak{F}_k = 1$$

eine Kompositionsreihe mit der „Minimalanzahl“ k.

Da der Satz für Gruppen mit der „Minimalanzahl“ 1, d. h. Gruppen, die keine (zulässigen!) invarianten Untergruppen, außer dem Einheitselemente haben, augenscheinlich gilt, können wir den Schluß durch vollständige Induktion führen, indem wir den Satz für Gruppen mit kleinerer „Minimalanzahl“ als bekannt voraussetzen.

Wir betrachten nun, wie es beim Jordan-Hölderschen Satze gewöhnlich geschieht, den Durchschnitt $\mathfrak{M}$ der Gruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1$, die wir als verschieden voraussetzen, was die Allgemeinheit des Beweises nicht beschränkt. Selbstverständlich ist $\mathfrak{M}$ invariant in $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1$. Wie gewöhnlich, beweisen wir, daß die Komplementärgruppen $\mathfrak{G}\,|\,\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1\,|\,\mathfrak{M}$ isomorph sind — aus jedem Element $F\,\mathfrak{M}$ der zweiten Gruppe entspringt das entsprechende $F\mathfrak{M}\mathfrak{H}_1 = F\mathfrak{H}_1$ der ersten, denn $\mathfrak{G}$ ist gleich $\mathfrak{F}_1\mathfrak{H}_1$ (weil dieses Produkt invariant in $\mathfrak{G}$ und größer als $\mathfrak{H}_1$ ist). — Wenn zwischen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{M}$ eine invariante Untergruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{F}_1$ existierte, so gäbe es also zugleich eine in $\mathfrak{G}$ invariante Untergruppe $\mathfrak{K}\mathfrak{H}_1$ zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}_1$ — entgegen der Definition der Kompositionsreihe. Die Gruppe $\mathfrak{K}$ existiert also nicht. Dann können wir aber für $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_1$ je eine Kompositionsreihe bilden, die mit $\mathfrak{M}$ beginnt:

$$\mathfrak{H}_1,\quad \mathfrak{M},\quad \mathfrak{M}', \ldots$$

$$\mathfrak{F}_1,\quad \mathfrak{M},\quad \mathfrak{M}', \ldots .$$

Nun besitzt $\mathfrak{F}_1$ offenbar die „Minimalanzahl“ $k-1$, für $\mathfrak{F}_1$ gilt der Satz bereits. $\mathfrak{M}$ hat also die Minimalanzahl $k-2$ und $\mathfrak{H}_1$ — für die der Satz gleichfalls gilt — die Minimalanzahl $k-1$. Das bedeutet aber

$$k = l,$$

was zu beweisen war.

Jede v. e. Gruppe besitzt also eine *feste* Anzahl von Gliedern in der Kompositionsreihe, die wir (das Einheitselement ungezählt) die „Kompositionszahl“ nennen wollen (bei E. Noether ist $k-1$ die „Länge“).

Jetzt ist es klar, daß eine invariante Untergruppe eine *kleinere* Kompositionszahl als die Gruppe hat. Darum kann in unserem Falle niemals eine Gruppe zu ihrer Untergruppe isomorph sein.

Wir haben uns darauf beschränkt, nur den Beweis der Invarianz der Kompositionszahl explizite auszuführen, da wir zum Beweise von Satz II nicht mehr brauchen werden. Es ist aber leicht einzusehen, daß sich der Jordan-Höldersche Satz über Kompositionsreihen *genau* übertragen läßt (Isomorphismus der Komplementärgruppen beider Reihen, abgesehen von der Ordnung, in der dieselben auftreten).

4. Wir wenden uns nun den direkten Produkten zu. Bekanntlich heißt die Zusammenfassung zweier Gruppen ein *direktes Produkt*, wenn beide Faktoren elementfremd sind und jedes Element des einen Faktors mit jedem des anderen vertauschbar ist (W. Krull sagt statt Produkt „Summe"). Wir wollen das direkte Produkt durch einen Punkt bezeichnen. Wenn

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F},$$

so ist jedes Element G von $\mathfrak{G}$ auf eine und nur eine Weise in der Form HF darstellbar. H und F heißen die *Komponenten* von G. Wenn G eine (invariante) Untergruppe von $\mathfrak{G}$ durchläuft, so bilden die entsprechenden Komponenten H auch eine (invariante) Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Das gilt, wie leicht zu sehen, auch bei den eingeführten Einschränkungen (Operatorensystem Θ). Komponenten vertauschbarer Elemente sind untereinander vertauschbar.

Es ist auch klar, daß die *Kompositionszahl eines direkten Produktes die Summe der Kompositionszahlen der Faktoren ist.* Eine invariante Untergruppe eines Faktors ist zugleich invariant in $\mathfrak{G}$.

Ein Isomorphismus zwischen zwei Untergruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ wird *zentral* genannt, wenn bei einander zugeordneten A und $B = AC$ das Element C immer mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist. Wir bemerken ausdrücklich, daß die Gesamtheit der mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbaren Elemente — das „*Zentrum*" von $\mathfrak{G}$ — *keine zulässige* Untergruppe zu sein braucht. Wir werden von der Gruppeneigenschaft des Zentrums nirgends Gebrauch machen.

Den zentralen Isomorphismus wollen wir durch $\simeq$ bezeichnen.

Hilfssatz I. *Wenn* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}$ *ist, so sind* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{D}$ *zentral isomorph.*

Beweis. Die Gruppen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ sind zunächst isomorph, da beide zu der Faktorgruppe $\mathfrak{G} | \mathfrak{A}$ isomorph sind. Dieser Isomorphismus ordnet die Elemente B und D einander zu, wenn $\mathfrak{A}B = \mathfrak{A}D$ ist. Hieraus folgt $B = AD$.

Dieses Element A ist nach der Definition des direkten Produktes mit allen Elementen von $\mathfrak{D}$ vertauschbar. Andererseits muß aus demselben Grunde jedes Element von $\mathfrak{A}$ mit B vertauschbar sein, und da es mit D vertauschbar ist, so folgt auch die Vertauschbarkeit mit A. Es stellt sich heraus, daß A mit allen Elementen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, also auch von $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D} = \mathfrak{G}$ vertauschbar ist — der Isomorphismus ist also ein zentraler.

Hilfssatz II. *Wenn die Zerlegung* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ *gilt,* $\mathfrak{H}$ *eine invariante Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *ist,* $\overline{\mathfrak{A}}$ *die Gruppe der Komponenten von* $\mathfrak{H}$ *in* $\mathfrak{A}$ *bedeutet und* $\mathfrak{D}$ *den Durchschnitt von* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{B}$, so ist $\overline{\mathfrak{A}}$ *isomorph zu* $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$. — Denn $\mathfrak{D}$ ist ja die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{H}$, die die 1 zur Komponente in $\mathfrak{A}$ haben.

Hilfssatz III. *Wenn* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ *gilt und* $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{H} > \mathfrak{A}$ *ist, so ist* $\mathfrak{H}$ *ein direktes Produkt*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{B}},$$

wo $\overline{\mathfrak{B}}$ *Untergruppe von* $\mathfrak{B}$ *ist.* — Denn jedes Element H von $\mathfrak{H}$ ist in der Form AB darstellbar. Da aber A zu $\mathfrak{H}$ gehört, so gehört auch B zu $\mathfrak{H}$. Sämtliche Komponenten von $\mathfrak{H}$ sind also auch isoliert vorhanden, d. h. sie bilden ein direktes Produkt.

5. Satz II (Der Fundamentalsatz). *Wenn eine v. e. Gruppe* $\mathfrak{G}$ *auf zweierlei Art als direktes Produkt unzerlegbarer Faktoren dargestellt ist:*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1\cdot\mathfrak{H}_2 \cdots \mathfrak{H}_k = \mathfrak{F}_1\cdot\mathfrak{F}_2 \cdots \mathfrak{F}_l \tag{1}$$

so ist $k = l$, *die Faktoren sind paarweise zentral isomorph und in jedem Produkt kann jeder Faktor durch einen zentral isomorphen der anderen Zerlegung ersetzt werden.*

Der Satz gilt selbstverständlich für Gruppen mit der Kompositionszahl 1, denn sie sind ja unzerlegbar. Wir nehmen ihn allgemein für Gruppen mit kleinerer Kompositionszahl, als die von $\mathfrak{G}$ als bewiesen an und beweisen ihn für $\mathfrak{G}$. Wir erinnern uns, daß die Kompositionszahl eines direkten Produktes gleich der Summe der Zahlen für die Faktoren ist.

Wir wählen einen beliebigen unter den Faktoren beider Seiten. Sei es $\mathfrak{H}_1$. Wir stellen die Elemente von $\mathfrak{H}_1$ durch die Komponenten F_i der rechten Seite dar. Die zu $\mathfrak{F}_i$ gehörigen Komponenten bilden dann eine Gruppe $\overline{\mathfrak{F}}_i$. Wir fügen die nötigen Elemente hinzu, um das direkte Produkt dieser $\overline{\mathfrak{F}}_i$ zu bilden, und erhalten (nach Hilfssatz III):

$$\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_1\cdot\overline{\mathfrak{H}} = \overline{\mathfrak{F}}_1\cdot\overline{\mathfrak{F}}_2\cdot\ldots\cdot\overline{\mathfrak{F}}_l, \tag{2}$$

wo $\overline{\mathfrak{H}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}_2\cdot\mathfrak{H}_3\cdot\ldots\cdot\mathfrak{H}_k$ ist.

Jedes $\overline{\mathfrak{F}}_i$ ist entweder gleich dem entsprechenden $\mathfrak{F}_i$ oder eine invariante Untergruppe desselben. In diesem letzteren Falle ist die Kompositionszahl von $\overline{\mathfrak{F}}_i$ — wie bewiesen — kleiner als die von $\mathfrak{F}_i$. Wenn wir also zunächst den Fall betrachten, daß nicht alle $\overline{\mathfrak{F}}_i$ ihren $\mathfrak{F}_i$ gleich sind, so hat das zuletzt gebildete Produkt $\overline{\mathfrak{G}}$ eine *kleinere* Kompositionszahl als $\mathfrak{G}$. Der Satz gilt für $\overline{\mathfrak{G}}$ bereits, $\mathfrak{H}_1$ muß einem unzerlegbaren Faktor der rechten Seite — etwa einem Faktor $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ von $\overline{\mathfrak{F}}_1$ — zentral isomorph und durch ihn ersetzbar sein. (Es muß $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 = \overline{\mathfrak{F}}_1$ sein, aber wir brauchen das nicht.) Die Ersetzbarkeit bedeutet, daß $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ mit $\mathfrak{H}$ — und um so mehr mit $\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ — elementefremd ist, d. h. nach Komponenten der linken Seite von (1) zerlegt, hat jedes $\overline{\overline{F}}_1$ eine von 1 verschiedene H_1-Komponente. Da die Elemente von $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ außerdem — als Komponente von $\mathfrak{H}_1$ — mit allen Elementen von $\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ vertauschbar sind, so kann man das direkte Produkt $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ bilden, das aber — wegen des Isomorphismus von $\mathfrak{H}_1$ und $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1$ — gleich $\mathfrak{G}$ ist, so daß wir erhalten:

$$(3) \qquad \mathfrak{G} = \overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{F}_l .$$

Es muß nun $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 = \mathfrak{F}_1$ sein, weil sonst $\mathfrak{F}_1$ nach Hilfssatz III zerlegbar wäre.

Wir haben jetzt also die Zerlegungen

$$(4) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k = \mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{F}_l .$$

Nach dem Hilfssatz I ist also

$$\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k \simeq \mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{F}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{F}_l .$$

Durch diesen Isomorphismus wird jedem Faktor $\mathfrak{F}_i$ der rechten Seite ein zentral isomorpher $\mathfrak{H}_i'$ der linken zugeordnet, so daß wir erhalten

$$\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k = \mathfrak{H}_2' \cdot \mathfrak{H}_3' \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_l' .$$

Diese Gruppe hat aber eine *kleinere* Kompositionszahl als $\mathfrak{G}$, der Satz gilt bereits, also ist

$$k = l$$

$$\mathfrak{H}_i \simeq \mathfrak{H}_i' \simeq \mathfrak{F}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Wir hatten bereits den Isomorphismus von $\mathfrak{H}_1$ und $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_1 = \mathfrak{F}_1$, der aber zunächst nur in $\overline{\mathfrak{G}}$ zentral war. Daraus folgt bereits, daß bei einander entsprechenden Elementen F_1 und $H_1 = F_1 C_1$ die Elemente C_1 mit allen Elementen von $\mathfrak{H}_1$ (die ja zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehören) vertauschbar sind. Aus (4) folgt aber auch, daß alle F_1 wie auch alle H_1 und darum auch alle C_1 mit allen Elementen von $\mathfrak{H}_2 \cdot \mathfrak{H}_3 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{H}_k$ vertauschbar sind, also ist C_1 mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar, wir haben

$$\mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{F}_1 .$$

Damit ist der Beweis des zentralen Isomorphismus für den Fall beendet, daß $\overline{\mathfrak{G}} < \mathfrak{G}$ ist. Im Falle aber, daß $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$ und alle $\overline{\mathfrak{F}}_i = \mathfrak{F}_i$ sind, beginnen wir mit $\mathfrak{F}_1$ statt mit $\mathfrak{H}_1$, zerlegen die Elemente von $\mathfrak{F}_1$ nach den

Faktoren der *linken* Seite und bilden aus den Komponenten das direkte Produkt

$$\bar{\mathfrak{H}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{H}}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{\mathfrak{H}}_k = \bar{\mathfrak{F}}_1 \cdot \bar{\mathfrak{F}} \cdot$$

Sollten wieder alle $\bar{\mathfrak{H}}_i$ gleich ihren $\mathfrak{H}_i$ sein, so würde das ergeben, daß nicht nur alle F_i Komponenten von $\mathfrak{H}_1$, sondern auch alle H_i Komponenten von $\mathfrak{F}_1$ sind.

Wenn $\mathfrak{D}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_l$ und $\mathfrak{E}$ den Durchschnitt von $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{H}_2 \ldots \mathfrak{H}_k$ bezeichnet, so muß nach Hilfssatz II in diesem Falle $\mathfrak{F}_1$ zu $\mathfrak{H}_1 | \mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}_1$ zu $\mathfrak{F}_1 | \mathfrak{E}$ isomorph sein. Das ist aber bei v. e. Gruppen, wo doch die Faktorengruppen kleinere Kompositionszahlen als ihre Zähler haben, nur dann möglich, wenn $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = 1$. Also sind $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ isomorph. Alle Elemente von $\mathfrak{H}_2 \ldots \mathfrak{H}_k$, die mit allen Komponenten von $\mathfrak{H}_1$ vertauschbar sein müssen, sind in diesem Falle mit allen Elementen von $\mathfrak{F}_1 \cdot \mathfrak{F}_2 \ldots \mathfrak{F}_l = \mathfrak{G}$ vertauschbar, also ist der Isomorphismus von $\mathfrak{F}_1$ mit $\mathfrak{H}_1$ ein zentraler. Da außerdem $\mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{F}_3 \ldots \mathfrak{F}_l$ teilerfremd ist, so läßt sich in (1) $\mathfrak{F}_1$ durch $\mathfrak{H}_1$ ersetzen (oder umgekehrt). Weiter — wie oben. Der Satz ist also in allen Fällen bewiesen.

6. Als Spezialfall für *kommutative* v. e. Gruppen erhalten wir den Satz von W. Krull. In diesem Falle könnte der Beweis in einigen Stellen noch mehr vereinfacht werden, da ja bei Abelschen Gruppen jede Untergruppe invariant und jeder Isomorphismus zwischen Untergruppen zentral ist. Die Ersetzbarkeit der isomorphen Faktoren durch einander wird bei W. Krull nicht bewiesen.

Einen anderen Spezialfall bilden die gewöhnlichen *endlichen* Gruppen, seien sie kommutativ oder nicht. Dann erhalten wir die Sätze von R. Remak. Dieser Beweis der Remakschen Sätze dürfte noch kürzer sein, als meine vorhergehenden Beweise, denn Satz I — der Satz von Jordan — braucht ja für endliche Gruppen nicht neu bewiesen zu werden.

(Eingegangen am 14. Juli 1927.)